

7 bis. Approfondimento sull'equilibrio di lungo periodo (capitolo VII)

7bis.1 La funzione di produzione di Cobb-Douglas (fine capitolo)

Una funzione usata di frequente dagli economisti per le sue proprietà matematiche al fine di rappresentare la funzione di produzione è la funzione di Cobb-Douglas.

Questa funzione ha la seguente forma generale :

$$7bis.1 \ Y = f(L, K) = L^\alpha K^\beta \quad \text{con } 0 < \alpha < 1; 0 < \beta < 1.$$

Abbiamo già utilizzato una funzione del tutto simile per rappresentare l'utilità del consumatore, quindi lo studio della funzione di Cobb-Douglas risulterà in questo modo più semplice. L'unica differenza notevole, dal punto di vista matematico, è che ora la funzione permette di misurare **cardinalmente** i livelli della produzione: non si tratta più di una semplice funzione indice.

E' relativamente facile scrivere la funzione dell'isoquanto:

$$7bis.2 \ K = \left(\frac{Y}{L^\alpha} \right)^{1/\beta}$$

Per ogni data quantità del prodotto è quindi possibile disegnare il relativo isoquanto, calcolando le diverse quantità di capitale e lavoro che permettono di ottenere la quantità di prodotto scelta.

Per quanto riguarda la produttività marginale del lavoro e del capitale, basta determinare le rispettive derivate parziali della funzione, analogamente a quanto abbiamo già visto a proposito della funzione indice di utilità:

$$7bis.3 \ pma_L = \alpha L^{(\alpha-1)} K^\beta = \frac{\alpha(L^\alpha K^\beta)}{L} = \alpha \frac{Y}{L}$$

$$7bis.4 \ pma_K = \beta L^\alpha K^{(\beta-1)} = \frac{\beta(L^\alpha K^\beta)}{K} = \beta \frac{Y}{K}$$

Il prodotto medio del lavoro è ovviamente $\frac{Y}{L}$ e il prodotto medio del capitale è $\frac{Y}{K}$.

Confrontando queste definizioni con le equazioni 7bis. 3) e 7bis. 4) otteniamo

$$7bis.5 \ pme_L = \frac{pma_L}{\alpha}$$

$$7bis.6 \ pme_K = \frac{pma_K}{\beta}$$

Poiché sappiamo che i prodotti medi sono sicuramente positivi (Y , L e K sono positivi per definizione) e poiché $0 < \alpha, \beta < 1$ allora anche i prodotti marginali sono positivi e $pma_L < pme_L$ e $pma_K < pme_K$. Ma, come sappiamo, se il prodotto medio è minore del prodotto marginale il prodotto medio deve essere decrescente. Ne consegue che anche il prodotto marginale, tanto del lavoro che del capitale, nella funzione di Cobb-Douglas è decrescente.

Sappiamo inoltre che il saggio marginale di sostituzione tecnica è uguale al rapporto tra le produttività marginali. Possiamo quindi scrivere:

$$7\text{bis. } SMST = \frac{pma_L}{pma_K} = \frac{\alpha Y}{L} / \frac{\beta Y}{K} = \frac{\alpha}{\beta} \frac{K}{L}$$

L'obiettivo dell'impresa, nel quadro dell'analisi degli isoquanti e degli isocosti, è quello di trovare la combinazione di capitale e lavoro che, dato il costo totale, massimizzi la produzione. Formalmente:

$$\text{Max } Y = L^\alpha K^\beta \text{ sotto il vincolo } CT = wL + rK$$

Ancora una volta, analogamente a quanto abbiamo già visto a proposito delle curve di indifferenza e delle rette di bilancio, la soluzione a questo problema può essere trovata uguagliando il saggio marginale di sostituzione tecnica al rapporto tra i prezzi, $SMST = w/r$:

$$\frac{\alpha}{\beta} \frac{K}{L} = \frac{w}{r}$$

Possiamo quindi trovare il valore di K che soddisfa questa condizione:

$$K = \frac{w}{r} \frac{\beta}{\alpha} L$$

Sostituendo il valore di K così trovato nell'isocosto, riscritto in questi termini $K = \frac{CT}{r} - \frac{w}{r} L$,

otteniamo:

$$\frac{w}{r} \frac{\beta}{\alpha} L = \frac{CT}{r} - \frac{w}{r} L; L \frac{w}{r} \left(\frac{\beta}{\alpha} + 1 \right) = \frac{CT}{r}$$

Il valore di L che soddisfa la massimizzazione del prodotto è quindi:

$$7\text{bis. } L = \frac{CT}{w \left(\frac{\beta}{\alpha} + 1 \right)}$$

Che può essere ulteriormente semplificato in questo modo

$$7\text{bis. 8a) } L = \frac{CT}{w \frac{\beta + \alpha}{\alpha}} = \frac{CT}{w} \frac{\alpha}{\alpha + \beta}$$

Ovviamente per il capitale K varrà l'equazione:

$$7\text{bis. 8.b) } K = \frac{CT}{r} \frac{\beta}{\alpha + \beta}$$

(Si consiglia di ricordarsi queste formule perché saranno utili per risolvere in breve tempo analoghi esercizi)

I valori di K e di Y possono a questo punto essere facilmente trovati dalle equazioni dell'isocosto e dell'isoquanto.

Per esemplificare quanto abbiamo visto sia l'equazione dell'isoquanto $Y=L^{1/2}K^{2/3}$ e quella dell'isocosto $140=10K+2L$. L'isocosto può essere scritto nel seguente modo: $K=140/10-(1/5)L$.

Eguagliando il saggio marginale di sostituzione tecnica al rapporto tra le produttività marginali otteniamo:

$$SMST = \frac{\alpha}{\beta} \frac{K}{L} = \frac{1/2}{2/3} \frac{K}{L} = \frac{3}{4} \frac{K}{L}$$

La condizione di massimo $SMST=w/r$ è quindi $\frac{3}{4} \frac{K}{L} = \frac{1}{5}$; ponendo K in funzione di L si ottiene:

$$K = \frac{1}{5} \frac{4}{3} L = \frac{4}{15} L$$

Sostituendo il valore così ottenuto di K nell'isocosto abbiamo:

$$4/15L=14-1/5L; 4/15L+1/5L=14; 7/15L=14$$

cioè $L=30$.

Lo stesso risultato si sarebbe ottenuto utilizzando direttamente l'equazione 7bis. 8a):

$$L = \frac{140 \left(\frac{1/2}{1/2 + 2/3} \right)}{2} = \frac{140 \frac{3}{7}}{2} = \frac{60}{2} = 30$$

Di conseguenza possiamo trovare il valore di K sull'isocosto $K=14-(1/5)*30=14-6=8$

Infine il Prodotto totale è $Y=30^{1/2}8^{2/3}=21,9089$

Il grafico relativo al problema che abbiamo studiato è il seguente

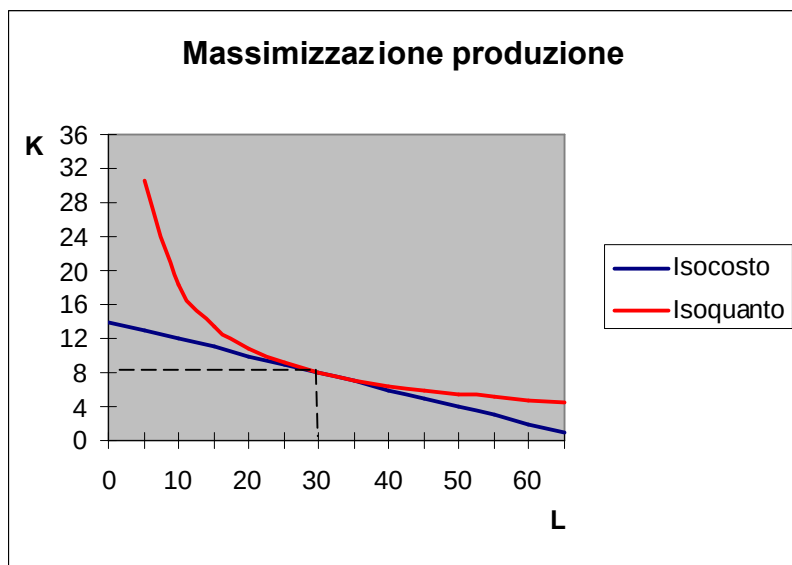


Figura 7bis. 1)

La funzione di produzione di Cobb-Douglas permette di verificare subito se si realizzano rendimenti di scala decrescenti, costanti o crescenti. Infatti, come dimostreremo subito, si ha:

- $\alpha+\beta<1 \rightarrow$ **rendimenti di scala decrescenti**
- $\alpha+\beta=1 \rightarrow$ **rendimenti di scala costanti**
- $\alpha+\beta>1 \rightarrow$ **rendimenti di scala crescenti**

Si aumenti della percentuale λ sia il capitale che il lavoro: il prodotto cresce da Y_1 a Y_2 e dalla situazione di partenza $Y_1=L^\alpha K^\beta$ si ottiene

$$Y_2=(\lambda L)^\alpha (\lambda K)^\beta = (\lambda^\alpha \lambda^\beta) (L^\alpha K^\beta) = \lambda^{(\alpha+\beta)} (L^\alpha K^\beta)$$

I casi possibili sono i seguenti:

1) Se $\alpha+\beta=1$ allora si può scrivere

$$Y_2 = \lambda (L^\alpha K^\beta) = \lambda Y \quad \text{La funzione mostra chiaramente } \mathbf{rendimenti costanti di scala}$$

Se $\alpha+\beta>1$ allora $\lambda^{(\alpha+\beta)} = \gamma > \lambda$ e si può scrivere

$$Y_2 = \lambda^{(\alpha+\beta)} (L^\alpha K^\beta) = \gamma Y \quad \text{La funzione mostra chiaramente } \mathbf{rendimenti crescenti di scala}$$

Se $\alpha+\beta<1$ allora $\lambda^{(\alpha+\beta)} = \delta < \lambda$ e si può scrivere

$$Y_2 = \lambda^{(\alpha+\beta)} (L^\alpha K^\beta) = \delta Y \quad \text{La funzione mostra chiaramente } \mathbf{rendimenti decrescenti di scala}.$$

Un ulteriore problema che la funzione di produzione di Cobb-Douglas permette di chiarire in modo semplice è relativo alla teoria della distribuzione.

La teoria della distribuzione neoclassica afferma che ciascun fattore produttivo riceve per i servizi produttivi prestati un compenso proporzionale al suo prodotto marginale. Uno dei problemi che sorgono quando si sostiene questa teoria della distribuzione è il seguente: cosa ci assicura che il prodotto totale sia esattamente uguale ai redditi così determinati? In altre parole dobbiamo mostrare che il prodotto non sia né superiore né inferiore alla retribuzione unitaria dei fattori (determinata dal relativo prodotto marginale) moltiplicata per la quantità del fattore utilizzato.

Come abbiamo visto, la retribuzione reale unitaria dei fattori produttivi è determinata nel seguente modo: $w/p = p m_l$ e $r/p = p m_k$

La teoria della distribuzione neoclassica può quindi essere sostenuta se vale la seguente condizione:

$$w/p * L + r/p * K = p m_l * L + p m_k * K = Y$$

Cioè il prodotto si distribuisce esattamente tra i fattori che concorrono alla sua produzione

Matematicamente questa condizione si verifica solo, come afferma il teorema di Eulero, quando la funzione di produzione è omogenea di I grado.

Dal punto di vista economico, la condizione che la funzione di produzione sia omogenea di I grado si verifica quando i rendimenti di scala sono costanti (cioè quando il prodotto varia esattamente nella stessa proporzione di fattori).

Questa proprietà è facilmente dimostrabile con la funzione di produzione di Cobb-Douglas.

Sia $L^\alpha K^\beta = Y$ con $\alpha + \beta = 1$

Ricordando le equazioni 7bis. 3 e 4 che determinano la produttività marginale dei fattori nell'equazione di Cobb-Douglas, la teoria della distribuzione è verificata:

$$pma_L L + pma_K K = \alpha \frac{Y}{L} L + \beta \frac{Y}{K} K = \alpha Y + \beta Y = (\alpha + \beta) Y = Y$$

Viceversa se $\alpha + \beta > 1$ $pma_L L + pma_K K = (\alpha + \beta) Y > Y$ allora si hanno rendimenti crescenti: la funzione è omogenea di grado > 1 e il prodotto non è sufficiente a retribuire i fattori.

Se $\alpha + \beta < 1$ $pma_L L + pma_K K = (\alpha + \beta) Y < Y$ allora si hanno rendimenti decrescenti e la funzione omogenea di grado < 1 : rimane un residuo di prodotto non distribuito.

Abbiamo però visto che in generale la teoria assume che la funzione di produzione non è omogenea di primo grado, ma presenta in un primo momento rendimenti di scala crescenti e in un secondo momento rendimenti di scala decrescenti. Tuttavia, nel punto di equilibrio concorrenziale, come abbiamo visto, ci troviamo nel punto di minimo dei costi medi di lungo periodo. Ora in questo punto, i rendimenti di scala non sono né crescenti né decrescenti, cioè sono costanti. Nel punto di equilibrio, possiamo allora concludere si realizza la condizione per la quale il prodotto si distribuisce esattamente in proporzione alla produttività marginale di ciascun fattore.

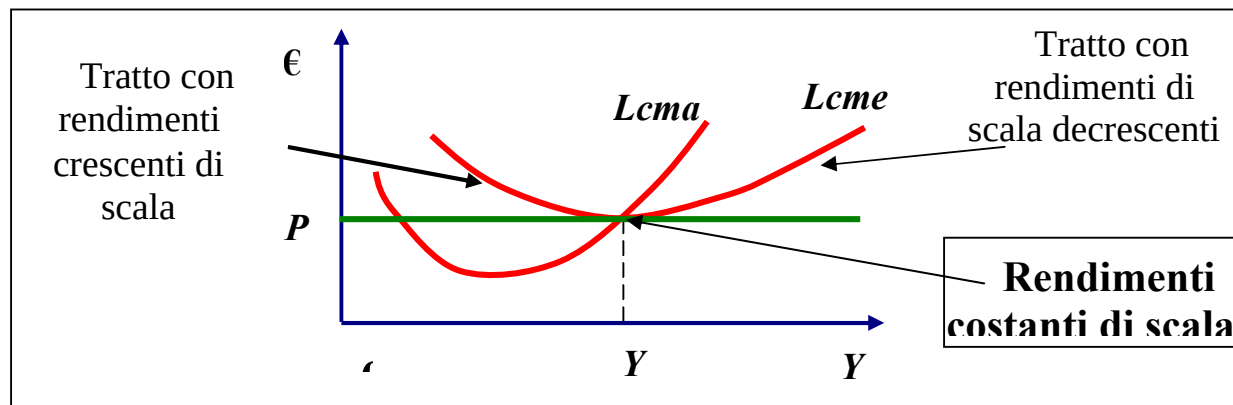


Figura 7 bis. 2

Come mostra la figura 7bis 2) nel punto di equilibrio (o meglio nella 2 regione intorno al punto di equilibrio) si realizzano rendimenti di scala costanti. L'ipotesi dell'andamento ad U dei costi medi si rivela quindi essenziale per la teoria microeconomica neoclassica: permette infatti di affermare che:

- il mercato realizza l'efficienza nella produzione, permettendo di produrre ai costi medi unitari più bassi possibili
- i consumatori pagano per il bene il prezzo minore possibile
- la concorrenza è sostenibile nel lungo periodo

- i fattori produttivi ricevono un compenso esattamente proporzionale alla loro produttività marginale

7bis 2. Il surplus del produttore e il surplus sociale (fine capitolo)

Analogamente a quanto abbiamo già visto nel capitolo 5 del libro (pagg. 125-126) a proposito del surplus del consumatore, possiamo definire il surplus del produttore. I produttori, infatti, ricevono un unico prezzo per tutta la quantità portata sul mercato. Tuttavia, in presenza di una curva di offerta inclinata positivamente, essi sono disposti a ricevere prezzi differenti per le diverse unità portate sul mercato. La differenza tra il prezzo effettivo e i prezzi di offerta per le singole unità rappresenta il surplus del produttore.

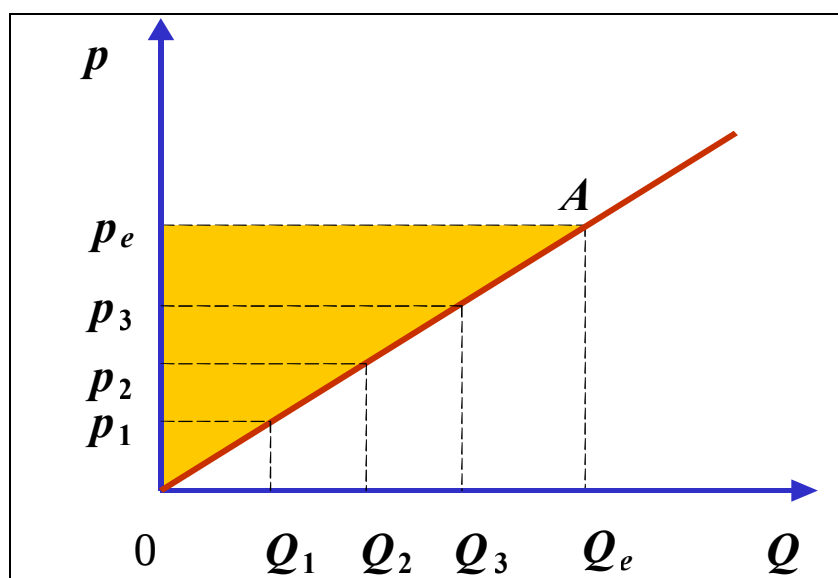


Figura 7.bis 3

Come di consueto un grafico ci aiuterà a comprendere questo ragionamento: nel mercato del bene *A* viene venduta la quantità Q_e al prezzo di equilibrio p_e . Tuttavia, data l'inclinazione positiva della curva di offerta, i produttori, per portare sul mercato la quantità Q_1 si sarebbero accontentati del prezzo p_1 . Su questa quantità, quindi, essi ricavano dallo scambio il prezzo p_e , e la differenza tra p_e e p_1 rappresenta il loro surplus. Analogamente per portare sul mercato la quantità Q_2 i produttori si sarebbero accontentati del prezzo p_2 , e per portare sul mercato la quantità Q_3 si sarebbero accontentati del prezzo p_3 . I produttori, quando la curva di offerta è continua e per semplicità è rappresentata da una retta, realizzano quindi nello scambio un surplus pari al triangolo delimitato in alto dal prezzo effettivo, in basso dalla curva di offerta e a sinistra dall'asse delle ordinate. (triangolo p_e0A). Il surplus dei produttori quindi è la differenza tra il ricavo totale (area del rettangolo p_eAQ_e0) che i produttori ricevono effettivamente e il prezzo che erano disposti ad accettare per vendere comunque, per così dire separatamente, le diverse unità del bene assorbite dal mercato, la cui somma è il triangolo $0Q_eA$ nella figura 7 bis. 3). In altre parole il surplus è la

differenza tra l'incasso monetario effettivamente realizzato dai produttori e l'incasso monetario minimo di cui si sarebbero accontentati per offrire sul mercato la data quantità del bene. Il concetto di surplus del produttore è un concetto soggettivo e non va confuso con il surplus o sovrappiù oggettivo dell'economia classica, che è invece un concetto oggettivo.

Per capire come varia il surplus dei produttori al variare dei prezzi, supponiamo che il prezzo del bene scenda da p_1 a p_2 . Come si vede nella figura 7 bis. 4) la quantità offerta scende da Q_1 a Q_2 .

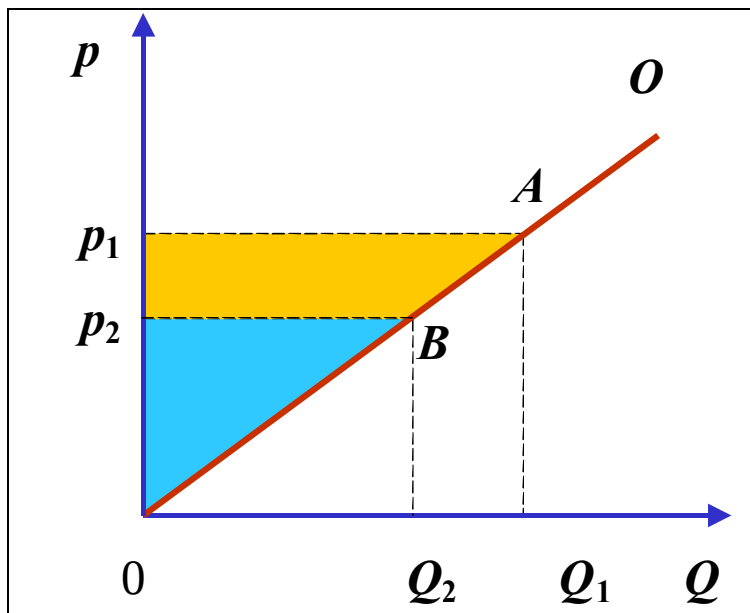


Figura 7 bis 4

Il ricavo totale, che prima era dato dall'area del rettangolo p_1AQ_1O , scende ora all'area del rettangolo p_2BQ_2O . Il surplus dei produttori scende dall'area del triangolo p_1AO all'area del triangolo p_2BO . La perdita di surplus per i produttori è data dall'area del trapezio p_1ABp_2 . La riduzione del prezzo comporta quindi una perdita di surplus per i produttori.

Possiamo a questo punto unificare l'analisi del surplus dei consumatori e del surplus dei produttori per vedere quale è il beneficio complessivo che si realizza sul mercato.

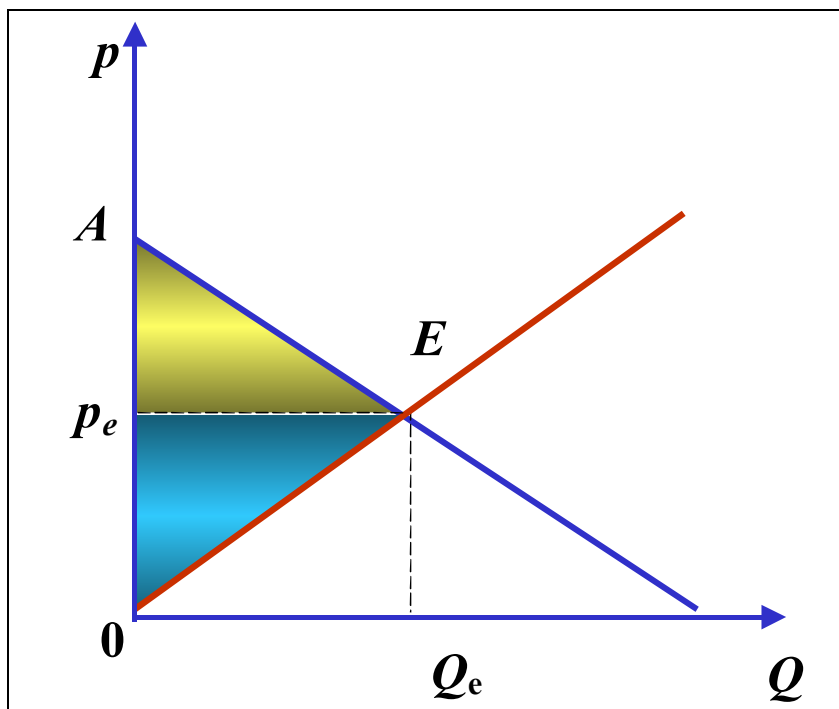


Figura 7bis 5

Il surplus sociale che si realizza sul mercato è dato dalla somma del surplus dei produttori e del surplus dei consumatori. Nel caso rappresentato dalla figura 7bis 5) il mercato è in equilibrio con il prezzo di p_e e la quantità di Q_e . Il surplus dei consumatori è rappresentato dall'area del triangolo p_eAE e il surplus dei produttori dall'area del triangolo p_e0E . Il surplus complessivo, cioè il beneficio per l'intera società che deriva dallo scambio è quindi rappresentato dall'aria del triangolo $0EA$. La teoria economica neoclassica afferma che il surplus sociale è massimizzato in corrispondenza del prezzo di equilibrio del mercato. Per la verità questa affermazione presuppone che nel mercato non ci siano esternalità, cioè che i benefici e i costi derivanti dallo scambio del bene siano tutti sostenuti solo dai partecipanti allo scambio e interamente rappresentati dai prezzi. Se ad esempio la produzione del bene comporta costi non sostenuti dai produttori, ma comunque subiti dalla società, come nel caso dell'inquinamento, per calcolare il surplus sociale occorrerebbe sottrarre al surplus rappresentato dalla figura 7bis 5) il costo sostenuto da chi subisce l'inquinamento.

Indipendentemente da questa considerazione, vediamo come varia il surplus sociale quando un qualche intervento esterno al mercato alteri le sue condizioni di equilibrio.

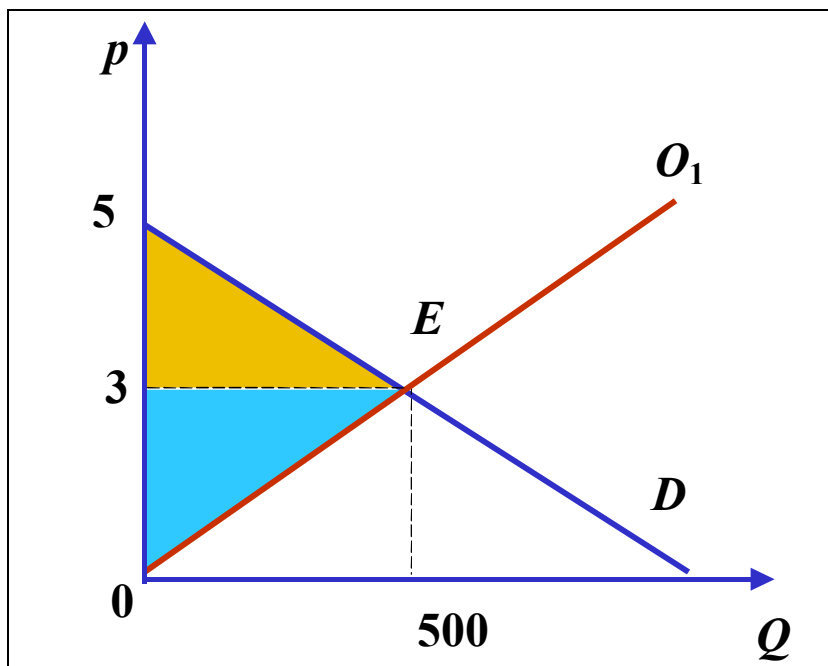


Figura 7bis. 6

Supponiamo ad esempio che il mercato in questione sia quello delle sigarette, che il prezzo di equilibrio sia € 3 per pacchetto e che la quantità di equilibrio scambiata sia 500 pacchetti. Nel caso raffigurato dalla figura 7bis. 6) il surplus dei consumatori è rappresentato dal triangolo giallo, la cui area è $[(5-3) \cdot 500] / 2 = € 500$. Il surplus dei produttori è invece rappresentato dall'area del triangolo celeste $3 \cdot 500 / 2 = € 750$. Il surplus sociale è il triangolo che risulta dalla somma dei due triangoli: l'area è $(5 \cdot 500) / 2 = € 1.250$.

Supponiamo ora che lo stato metta una tassa alla produzione pari a € 0,50 per pacchetto. La tassa alla produzione significa che per ogni pacchetto venduto i produttori debbono pagare allo stato 50 centesimi. Questa tassa equivale quindi ad aumento dei costi di produzione dei produttori di 50 centesimi per unità venduta e conseguentemente, come mostrato in figura 7bis. 7) la curva di offerta di mercato si sposta parallelamente verso l'alto per una distanza pari a 0,50.

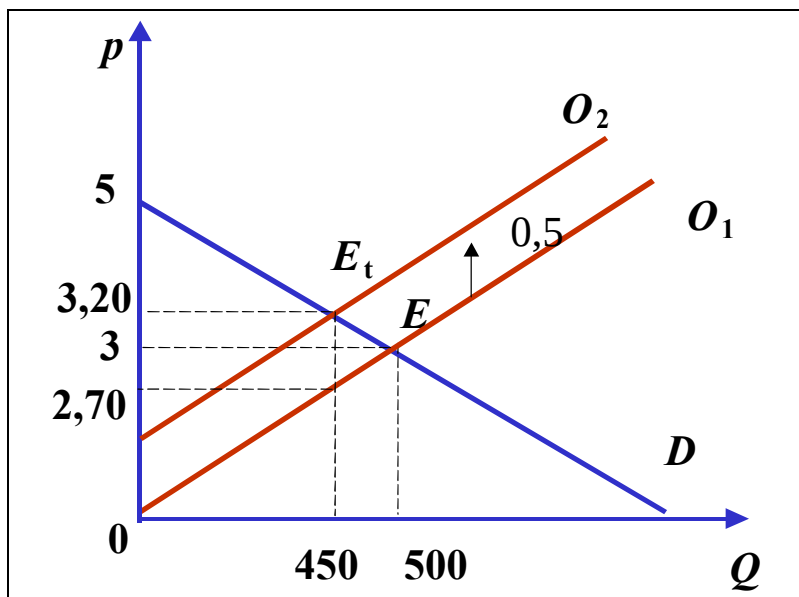


Figura 7 bis. 7

La curva di offerta si sposta da O_1 a O_2 e il nuovo equilibrio è rappresentato dal punto E_t in cui la nuova curva di offerta O_2 incontra la curva di domanda. Si realizza quindi sul mercato un nuovo equilibrio, con il prezzo più alto di € 3,20 a pacchetto e con una quantità più bassa di pacchetti venduti pari a 450. Si deve osservare che i produttori raccolgono semplicemente la tassa di 0,50 centesimi a pacchetto e la versano allo stato. Ciò che rimane loro pagata la tassa è esattamente € 2,70 a pacchetto. La loro situazione è quindi del tutto uguale a quella rappresentata dalla combinazione tra il prezzo di € 2,70 e la quantità di 450 sulla vecchia curva di offerta O_1 . Possiamo allora vedere che, indipendentemente da chi deve giuridicamente pagare la tassa (il contribuente di diritto), questa è di fatto pagata in parte dai consumatori e in parte dai produttori. Più precisamente, per ogni pacchetto i produttori di fatto pagano “solo” 0,30 centesimi (la differenza tra il prezzo di € 3 prima ricevuto e il prezzo di € 2,70 al netto dell’imposta, ricevuto ora), mentre i consumatori pagano gli altri 0,20 centesimi (la differenza tra il nuovo prezzo di € 3,20 e il vecchio prezzo di € 3), subendo un prezzo più alto. Questo fenomeno, per cui i contribuenti di diritto non coincidono con i contribuenti di fatto si chiama *traslazione di imposta*. Vediamo ora che cosa succede al surplus dei consumatori e dei produttori.

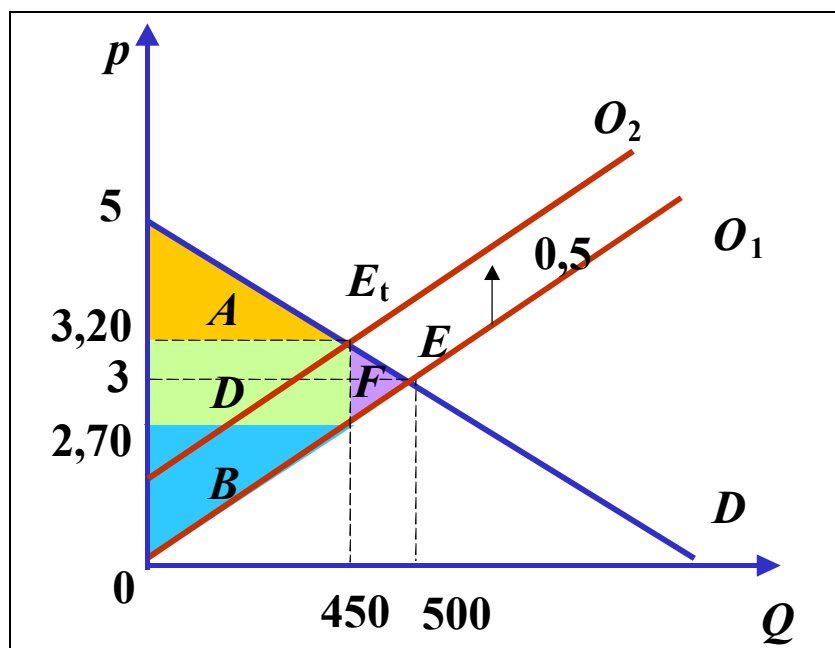


Figura 7bis. 8

Il surplus dei consumatori è, con il nuovo prezzo, misurato dall'area del triangolo *A*, pari a $[(5 - 3,20) \cdot 450] / 2 = \text{€ } 405$. La perdita di surplus dei consumatori è quindi $500 - 405 = \text{€ } 95$.

Come abbiamo visto la situazione dei produttori, pagate le imposte allo stato, è equivalente a quella in cui si sarebbero trovati lungo la curva *O*₁, con un prezzo di € 2,70 e una quantità venduta di 450. Di conseguenza il loro surplus è $(270 \cdot 450) / 2 = \text{€ } 607,50$. La perdita di surplus dei produttori è di conseguenza $750 - 607,50 = \text{€ } 142,50$. La somma delle perdite di surplus è quindi $95 + 142,50 = \text{€ } 237,5$. Questa somma non va però completamente perduta: infatti ora lo stato realizza un introito fiscale sulle sigarette pari alla tassa unitaria moltiplicata la quantità venduta, cioè l'area del rettangolo *D*: $0,50 \cdot 450 = \text{€ } 225$. L'introito dello stato non copre però l'intera perdita di surplus dei consumatori e dei produttori. Infatti la perdita di surplus sociale è pari a $237,5 - 225 = \text{€ } 12,5$. Questa perdita, geometricamente è rappresentata dall'area del triangolo *F*: $0,50 \cdot 50 / 2 = \text{€ } 12,5$

La teoria economica giunge quindi alla conclusione che l'intervento esterno sul mercato fa diminuire il surplus sociale creato dal mercato stesso.

Tuttavia occorre prendere queste conclusioni con cautela: l'analisi è parziale e si riferisce al solo mercato delle sigarette. Quindi non sappiamo come lo stato spende l'introito della tassa. Se ad esempio fosse finanziata la produzione di servizi sociali di pubblica utilità o beni pubblici, non producibili privatamente, il benessere sociale potrebbe aumentare di più di € 225, cioè della spesa. Inoltre, come abbiamo accennato precedentemente, il consumo di sigarette comporta effetti negativi di lungo periodo per i consumatori ed esternalità negative (cioè effetti negativi anche per i non fumatori che subiscono il fumo passivo) e maggiori spese sanitarie, che possono essere attenuati dal

minor consumo. Un'analisi complessiva degli effetti sui benefici della tassa richiederebbe quindi di tener conto di tutta una serie di fattori che non possono essere considerati nell'analisi parziale.